SERIE STT CGIG SESSION JUIN 2005 France METROPOLITAINE

Problème (Enoncé)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal d'unité 2 cm sur chaque axe.
La courbe ($\mathcal{C}$) donnée en annexe 2 représente une fonction f définie sur $]0\,;\ +\infty[$.
Le point A a pour coordonnées (1 ; 2).
La droite (T) est tangente en A à ($\mathcal{C}$) ; elle passe par le point de coordonnées (0 ; 6).
Le point B a pour abscisse e^2.
La tangente à ($\mathcal{C}$) en B est parallèle à (Ox), cette tangente n'est pas tracée sur le dessin.

Partie A : Étude de la fonction f

La fonction f représentée par ($\mathcal{C}$) est définie sur $]0\,;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2 - 2\ln x}{x}$$

1. Calculer l'abscisse du point d'intersection de ($\mathcal{C}$) avec (O x).

2. En remarquant que $f(x) = 2 \times \frac{1}{x} - 2 \times \frac{\ln x}{x}$, calculer la limite de f en $+\infty$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe ($\mathcal{C}$) ?

3. En remarquant que $f(x) = \frac{1}{x}(2 - 2\ln x)$, calculer la limite de f en 0.
   Que peut-on en déduire pour la courbe ($\mathcal{C}$) ?
   (a) Montrer que $f'(x) = \frac{2\ln x - 4}{x^2}$.
   (b) Résoudre : $2\ln x - 4 \geq 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$ et le tableau de variations de f.
   (c) Donner l'ordonnée exacte du point B (détailler les calculs).

Partie B : Calcul d'aire

1. On considère les fonctions G et g définies respectivement sur $]0\,;\ +\infty[$ par

$$G(x) = (\ln x)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2\ln x}{x}$$

(a) Montrer que G est une primitive de g sur $]0\ ;\ +\infty[$.

(b) Vérifier que $f(x) = \dfrac{2}{x} - g(x)$; en déduire une primitive F de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. On pose : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(a) $\mathcal{A}$ est l'aire, en unités d'aire, d'un domaine $(\mathcal{D})$: hachurer $(\mathcal{D})$ sur le graphique.

(b) Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

(c) En déduire l'aire en cm^2 du domaine $(\mathcal{D})$.

Annexe 2