SERIE STT CGIG SESSION JUIN 2004 France METROPOLITAINE

Problème (Enoncé)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a + (x+b)\mathrm{e}^{-x}.$$

où a et b sont deux réels donnés.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ avec pour unités graphiques 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

1. Calculer $f(x)$, où f' désigne la dérivée de la fonction f.
2. (a) En annexe 2 est fourni le tracé de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0. Ce graphique sera remis complété avec la copie. Justifier que $f(0) = 2$ et $f'(0) = 2$.

   (b) À l'aide de ces deux égalités, déterminer les réels a et b.

Partie B

On prend pour tout réel x

$$f(x) = 3 + (x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Montrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = 3 + \frac{x}{\mathrm{e}^x} - \mathrm{e}^{-x}.$$

   Sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
   En déduire une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
3. (a) Montrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = (2-x)\mathrm{e}^{-x},$$

où f' désigne la dérivée de la fonction f.
Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
Dresser le tableau de variations de f.

(b) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ sur le graphique en annexe 2.

Partie C

1. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = x\left(3 - \mathrm{e}^{-x}\right),$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer l'aire, en cm^2, de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

Annexe 2