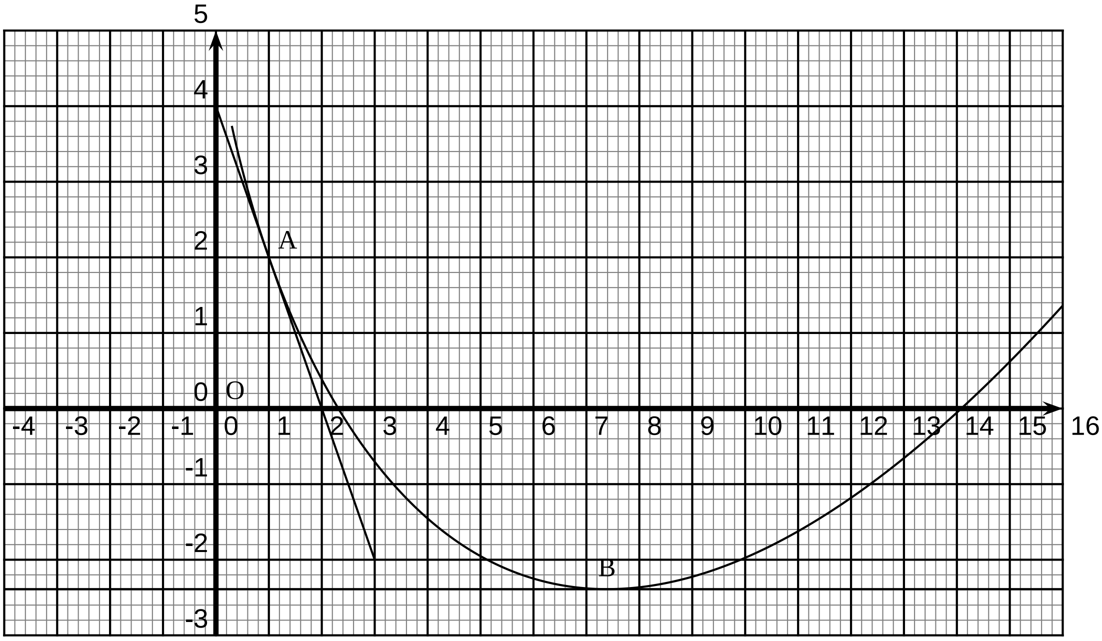
SERIE STT CGIG SESSION JUIN 2003 France METROPOLITAINE

Problème (Enoncé)

Partie A

On donne la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$. Cette courbe passe par les points A $(1\,;\,2)$ et B d'abscisse e^2. On a représenté les tangentes à $\mathcal{C}$ en A et B.



À l'aide du graphique, déterminer

1. Les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(\text{e}^2)$.
2. Un encadrement par deux entiers consécutifs de chacune des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Partie B

La fonction f précédente est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par l'expression

$$f(x) = x\ln(x) + ax + b.$$

En utilisant les résultats $f(1)$ et $f'(1)$, déterminer les valeurs de a et b.
Vérifier que la valeur de $f'(\mathrm{e}^2)$ lue graphiquement convient.

Partie C

On admet que la fonction f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x) - 3x + 5.$$

1. (a) On admet : $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
   (b) Montrer que $f(x) = x\,[\ln(x) - 3] + 5$.
   Calculer : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
2. Résoudre par le calcul $f'(x) \geqslant 0$.
3. Dresser le tableau complet des variations de f.

Partie D

On donne la fonction G définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$G(x) = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2.$$

1. Montrer que $G'(x) = x\ln(x)$.
2. En déduire une primitive F de f.
3. Calculer l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près.