

**SERIE STL Chimie Labo SESSION JUIN 2003 France
METROPOLITAINE**

Problème (Enoncé)

Partie A

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} , par :

$$g(x) = 1 - 2x + e^{2x}.$$

1. Pour tout x de \mathbb{R} , déterminer $g'(x)$. En déduire les variations de g sur \mathbb{R} . (on ne demande pas les limites de g aux bornes de son ensemble de définition).
2. Démontrer que pour tout x de \mathbb{R} , $g(x) > 0$.

Partie B

On considère maintenant la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x + 2 + xe^{-2x}.$$

On appelle \mathcal{C} sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. (a) Calculer pour tout x de \mathbb{R} , $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{2x}}$.
(b) En utilisant la **Partie A**, déterminer le tableau des variations de f .
(c) En déduire que, pour tout x de $[0; +\infty[$ on a : $f(x) > 0$.
4. (a) Démontrer que, la droite D d'équation $y = x + 2$ est asymptote à \mathcal{C} en $+\infty$.
(b) Etudier la position relative de \mathcal{C} et D .
5. Tracer \mathcal{C} et D .
6. Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \right) e^{-2x}.$$

- (a) Démontrer que F est une primitive de f sur \mathbb{R} .

- (b) Soit \mathcal{A} l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
Déterminer la valeur exacte de \mathcal{A} , puis sa valeur arrondie à 0,1 près.