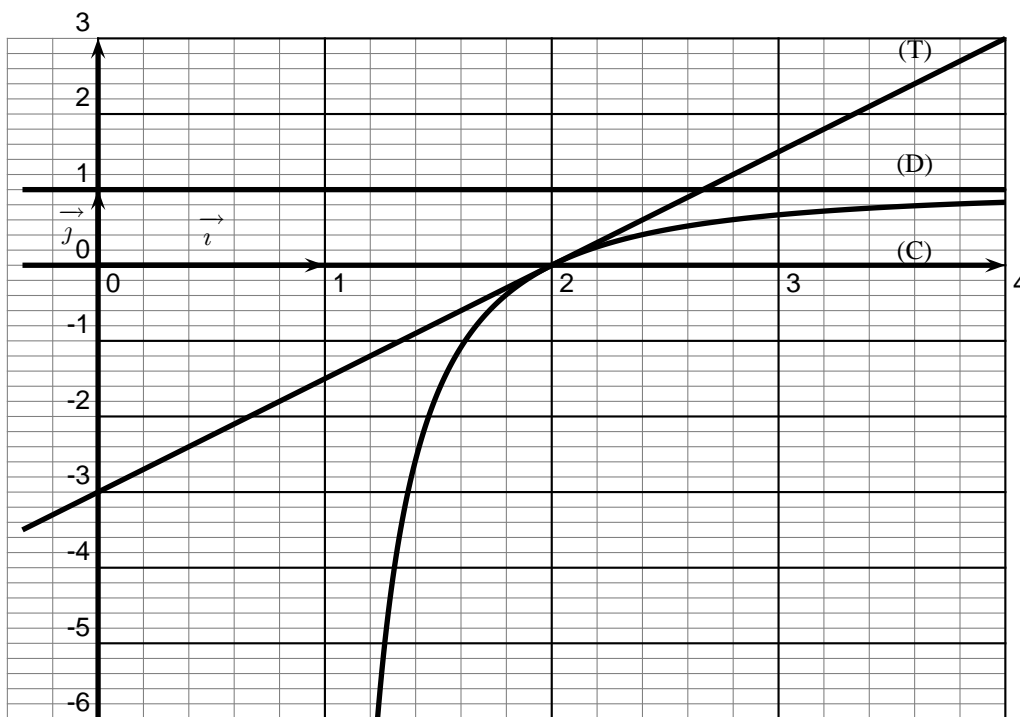


**SERIE STI GE SESSION JUIN 2003 France  
METROPOLITAINE**

**Problème (Énoncé)**

**Partie A**

On donne, dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , d'unités graphiques 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées, la représentation graphique (C) d'une fonction  $g$  définie, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  ainsi que deux droites (T) et (D). La droite (T) passe par les points de coordonnées respectives  $(2; 0)$  et  $(0; -3)$ . La droite (D) a pour équation  $y = 1$ .



1. (a) Déterminer graphiquement  $g(2)$ .
- (b) Sachant que la droite (T) est tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 2, déterminer graphiquement  $g'(2)$ .
- (c) On admet que la droite (D) est asymptote à la courbe (C). Déterminer graphiquement la limite de  $g(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
- (d) Sachant que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un seul point, Etudier graphiquement le signe de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

2. On définit les fonctions  $g_1$ ,  $g_2$  et  $g_3$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par :

$$g_1(x) = 1 - \frac{1}{x-1} \quad ; \quad g_2(x) = 1 - \frac{2}{x^2-x} \quad ; \quad g_3(x) = \ln(x-1).$$

L'une d'elles est la fonction  $g$  que l'on se propose d'identifier en utilisant les résultats de la première question.

- (a) Calculer  $g_1(2)$ ,  $g_2(2)$  et  $g_3(2)$ .  
Ces résultats permettent-ils d'éliminer une des trois fonctions ?
- (b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_2(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_3(x)$ .  
Quelle fonction peut-on alors éliminer ?
- (c) On note  $g'_1$  et  $g'_2$  les fonctions dérivées respectives de  $g_1$  et  $g_2$ .  
Calculer  $g'_1(2)$  et  $g'_2(2)$  puis conclure.

## Partie B

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  par

$$f(x) = x + 1 + 2 \ln x - 2 \ln(x-1).$$

On note  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unités graphiques 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. (a) Quelle propriété de la fonction logarithme népérien permet de prouver que, pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]1; +\infty[$ ,

$$f(x) = x + 1 + 2 \ln \left( \frac{x}{x-1} \right) ?$$

- (b) Déterminer la limite de  $f$  en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  ?
2. (a) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
(b) Justifier que la droite (D) d'équation  $y = x + 1$  est asymptote oblique à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .  
(c) Montrer que pour tout  $x$  de l'intervalle  $]1; +\infty[$ ,  $\frac{x}{x-1} > 1$ .

Quel est alors le signe de  $\ln \left( \frac{x}{x-1} \right)$  pour  $x$  appartenant à  $]1; +\infty[$  ?

- (d) En déduire la position de la courbe  $(C_f)$  par rapport à la droite (D).
3. (a) Déterminer la fonction dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  et vérifier que, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $]1 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = g(x)$  où  $g$  est la fonction trouvée dans la **partie A**.
- (b) A l'aide des résultats graphiques obtenus dans la **partie A**, dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .

## Partie C

1. Montrer que, sur l'intervalle  $]1 ; +\infty[$ , la fonction  $H$  définie par

$$H(x) = x \ln x - (x - 1) \ln(x - 1)$$

est une primitive de la fonction  $h$  définie par  $h(x) = \ln x - \ln(x - 1)$  sur cet intervalle.

2. (a) Sur la feuille annexe jointe, à rendre avec la copie, on a représenté la courbe  $(C_f)$ . Sur cette figure, représenter la droite (D) et hachurer la partie du plan comprise entre la droite (D), la courbe  $(C_f)$  et les droites d'équations  $x = 2$  et  $x = 3$ .
- (b) On désigne par  $\mathcal{A}$  la valeur de l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan hachurée précédemment. Donner la valeur exacte de  $\mathcal{A}$  puis une valeur décimale approchée à  $10^{-2}$  près par excès.

## Annexe : représentation de la courbe

$(C_f)$

