

**SERIE STI Arts appliqués SESSION JUIN 2005 France
METROPOLITAINE**

Exercice (Enoncé)

Un club sportif confie l'élaboration d'un logo à une agence. Celle-ci choisit un « drapeau » pour motif.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ par

$$f(x) = x^3 - x + 2.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 5 cm. On appelle C_f la courbe représentative de f dans ce repère.

1. f' désigne la fonction dérivée de f ; calculer $f'(x)$.
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[-1 ; 1]$ sachant que $f'(x) = 3 \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

On indiquera pour $f \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ et $f \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ des valeurs approchées décimales arrondies au centième.

3. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant (on donnera des valeurs approchées décimales arrondies au centième).

x	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f(x)$			2,38					1,66			

4. Tracer C_f sur la feuille de papier millimétré.

5. Calculer l'intégrale $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$.

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ par

$$g(x) = (x - 1)e^x + 2.$$

On appelle C_g la courbe représentative de g dans le plan muni du repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[-1 ; 1]$, $g'(x) = xe^x$ où g' désigne la fonction dérivée de g .
2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $[-1 ; 1]$ et dresser le tableau de variations de g .
3. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant (on donnera des valeurs approchées décimales arrondies au centième).

x	-1	-0,8	-0,4	0	0,4	0,6	0,8	1
$g(x)$		1,19				1,27		

4. Tracer C_g dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) que précédemment.
5. On considère la fonction G définie sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ par

$$G(x) = (x - 2)e^x + 2x.$$

- a. Montrer que G est une primitive de g sur $[-1 ; 1]$.
- b. Calculer l'intégrale $J = \int_{-1}^1 g(x) dx$.

Partie C

La partie du plan \mathcal{A} limitée par les courbes C_f , C_g et par la droite d'équation $x = -1$ représente la toile du drapeau.

1. Placer les points $P(-1 ; 2)$ et $Q(-1 ; 0)$ puis tracer le segment $[PQ]$ pour achever le motif.
2. On suppose que, pour tout x de l'intervalle $[-1 ; 1]$, $f(x) \geq g(x)$ et que l'aire de la partie \mathcal{A} du plan est donnée, en unités d'aires, par $A = \int_{-1}^1 [f(x) - g(x)] dx$.
- a. Calculer la valeur exacte de A .
- b. En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire de \mathcal{A} exprimée en cm^2 .