SERIE STI Arts appliqués SESSION JUIN 2004 France METROPOLITAINE

Exercice 2 (Enoncé)

Un musée souhaite orner ses publications d'un motif en filigrane.
Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 5 cm.
L'axe des ordonnées sera centré sur la feuille de papier millimétré.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par :

$$f(x) = 2\text{e}^x - 4x.$$

On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni du repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. f' désignant la fonction dérivée de f, calculer $f'(x)$ et étudier son signe. Dresser le tableau de variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 0.
3. Tracer avec soin la courbe $\mathcal{C}_f$ et sa tangente T en A.
4. Calculer l'intégrale $\text{I}_f = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x$.

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle [0 ; 1] par :

$$g(x) = \ln(x+1).$$

On appelle $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le plan muni du repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Etudier les variations de la fonction g. Dresser son tableau de variations.
2. Tracer avec soin la courbe $\mathcal{C}_g$ dans le même repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ que précédemment.
3. Soit G la fonction définie sur [0 ; 1] par

$$G(x) = (x+1)\ln(x+1) - (x+1).$$

a. Vérifier que G est une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

b. Calculer l'intégrale $\mathrm{I}_g = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie C : constitution du motif

On nomme P le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 1 et Q le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse 1.

La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées transforme les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, respectivement en courbes $\mathcal{C}'_f$ et $\mathcal{C}'_g$ (les points P et Q ayant pour images respectives P$'$ et Q$'$).

Tracer les courbes $\mathcal{C}'_f$ et $\mathcal{C}'_g$ ainsi que les segments [PQ] et [P$'$Q$'$].

Le domaine limité par les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}'_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}'_g$ ainsi que par les segments [PQ] et [P$'$Q$'$] constitue le motif que cherche à reproduire le musée.

Expliquer comment on peut calculer l'aire de ce motif et calculer cette aire en cm^2 (on donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près).