SERIE S SESSION JUIN 2005 France METROPOLITAINE

Exercice 4 (Enoncé)

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3e^{x/4}}{2 + e^{x/4}}$$

1. Démontrer que $f(x) = \dfrac{3}{1 + 2\,e^{-x/4}}$.

2. Etudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

3. Etudier les variations de la fonction f.

Partie B

1. On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(E_1) \ : \ y' = \frac{y}{4}$$

   (a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

   (b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est à dire $g(0) = 1$.

   (c) Après combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs pour la première fois ?

2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le

nombre des rongeurs vivant au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2)\ :\ \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{[u(t)]^2}{12} & \text{pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

(a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions

$$(E_3)\ :\ \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} & \text{pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

(b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

(c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?