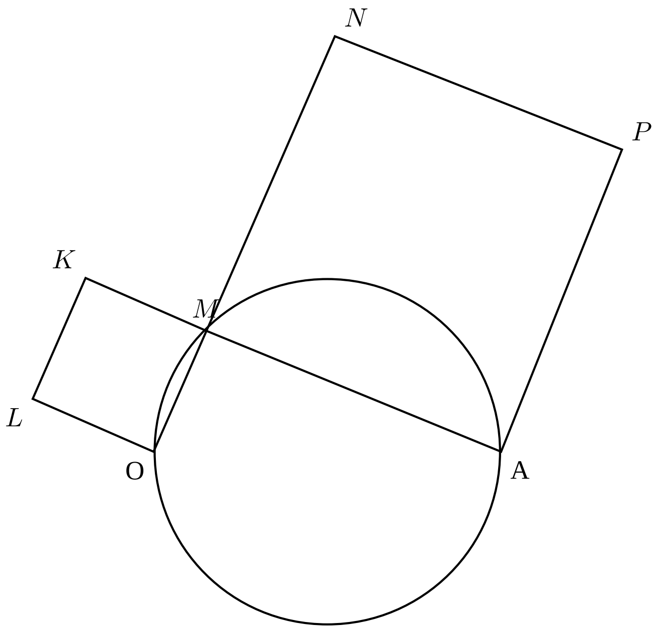
SERIE S SESSION JUIN 2005 France METROPOLITAINE

Exercice 2 (Enoncé)



Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [OA], un point M variable appartenant au cercle $\mathcal{C}$, et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct MAPN et MKLO. La figure est représentée ci-dessus.

Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et de montrer que le point N appartient à un cercle à déterminer.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On note k, l, m, n et p les affixes respectives des points K, L, M, N et P.

1. Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle $\mathcal{C}$, on a

$$\left|m - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

2. Etablir les relations suivantes : $l = im$ et $p = -im + 1 + i$. On admettra que l'on a également $n = (1 - i)m + i$ et $k = (1 + i)m$.

3. (a) Démontrer que le milieu Ω du segment [PL] est un point indépendant de la position M sur le cercle $\mathcal{C}$.

   (b) Démontrer que le point Ω appartient au cercle $\mathcal{C}$ et préciser sa position sur ce cercle.

4. (a) Calculer la distance KN et démontrer que cette distance est constante.

   (b) Quelle est la nature du triangle Ω N K ?

5. Démontrer que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont on déterminera le centre et le rayon.