

**SERIE S SESSION JUIN 2004 France
METROPOLITAINE**

Exercice 2 Spécialite (Enoncé)

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x - 1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}) = x^k - 1.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2. (a) Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = dk$.
Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.
- (b) Dédurre de la question précédente que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.
3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur pgcd.
- (a) On définit m' et n' par $m = dm'$ et $n = dn'$. En appliquant le théorème de Bezout à m' et n' , montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que : $mu - nv = d$.
- (b) On suppose u et v strictement positifs.
Montrer que : $(a^m - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^d - 1$.
Montrer ensuite que $a^d - 1$ est le pgcd de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.
- (c) Calculer, en utilisant le résultat précédent, le pgcd de $2^{63} - 1$ et de $2^{60} - 1$.