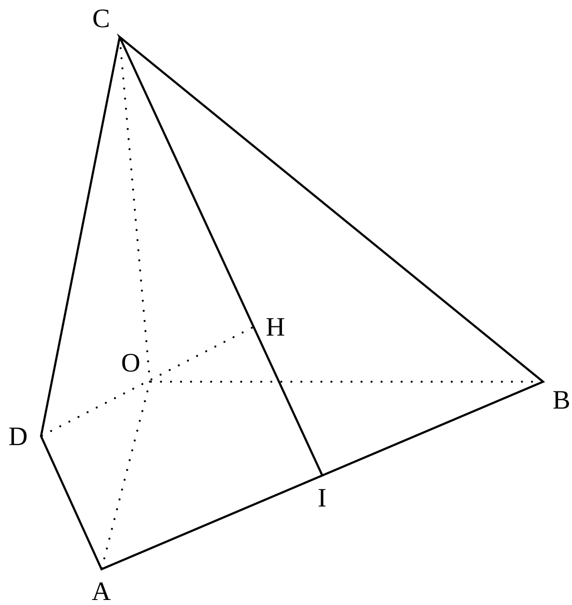
## *SERIE S SESSION JUIN 2003 France METROPOLITAINE*

# Exercice 2 (Enoncé)




Soient $a$ un réel strictement positif et OABC un tétraèdre tel que :

- OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O,
- OA = OB = OC = $a$.

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC, et D le point de l'espace défini par $\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC.
3. Calcul de OH
   (a) Calculer le volume V du tétraèdre OABC puis l'aire S du triangle ABC.
   (b) Exprimer OH en fonction de V et de S, en déduire que OH = $a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
4. Étude du tétraèdre ABCD.
   L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O\ ;\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{OA},\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{OB},\ \dfrac{1}{a}\overrightarrow{OC}\right)$.
   (a) Démontrer que le point H a pour coordonnées : $\left(\dfrac{a}{3}, \dfrac{a}{3}, \dfrac{a}{3}\right)$.
   (b) Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).
   (c) Soit $\Omega$ le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD. Démontrer que $\Omega$ est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.