SERIE L SESSION JUIN 2004 France METROPOLITAINE

Exercice 3 (Enoncé)

Le but de l'exercice est de prouver pour les nombres à quatre chiffres, le critère de divisibilité : « Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3 ».

1. Un exemple

   (a) Pour un entier naturel n, que signifie La phrase « n est congru à 1 modulo 3 » ?

   Traduire à l'aide d'une congruence « n est divisible par 3 ».

   (b) Pour chacun des nombres suivants, donner l'entier positif le plus petit auquel il est congru modulo 3 : 10, 100, 1 000, 10^p où p est un entier positif.

   (c) Déterminer le plus petit entier, positif auquel est congru le nombre 4520 modulo 3.

   On remarquera que $4520 = 4 \times 1000 + 5 \times 100 + 2 \times 10$.

   (d) En utilisant la **question b.** trouver le reste de la division de 5112 par 3.

2. Quelques généralisations

   On considère un entier N à quatre chiffres, quatre entiers $a,\ b,\ c$ et d entre 0 et 9 tels que $a \neq 0$ et $N = 1000a + 100b + 10c + d$.

   Le chiffre des unités est d, celui des dizaines c, des centaines b et des milliers a.

   (a) Montrer que $N \equiv a + b + c + d \quad \text{modulo} \quad 3$.

   (b) Justifier, pour les nombres à quatre chiffres, le critère de divisibilité par 3 énoncé au début de l'exercice.

   (c) Énoncer un critère analogue de divisibilité par 9 et le démontrer pour les nombres à quatre chiffres.