SERIE ES SESSION JUIN 2004 France METROPOLITAINE

Exercice 2 (Enoncé)

Soit f la fonction définie pour tout x élément de $\mathbb{R}$ par

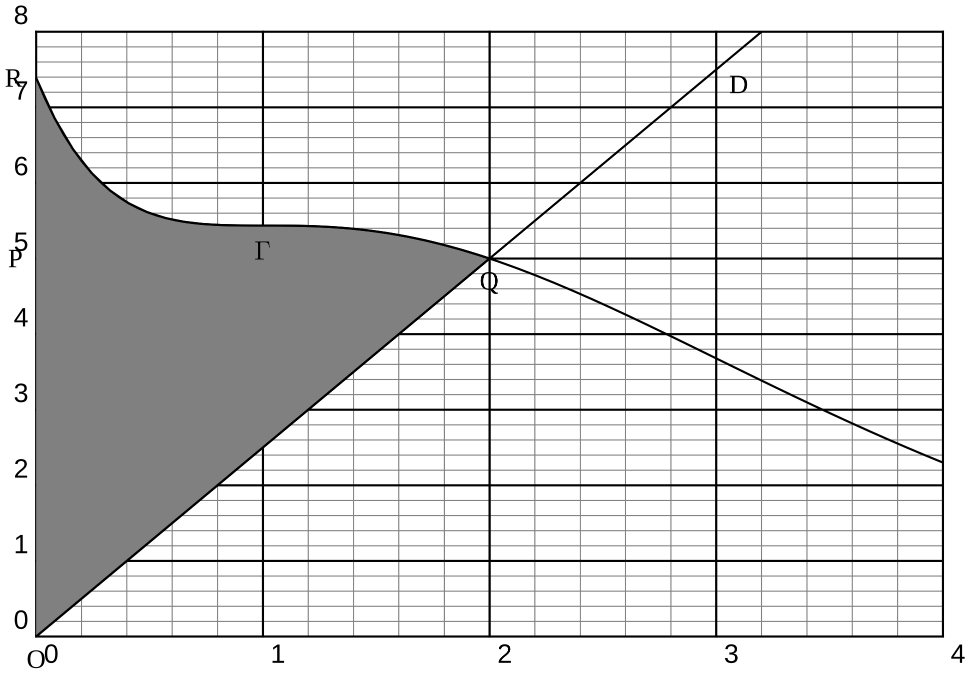
$$f(x) = \left(x^2 + 1\right) \mathrm{e}^{-x+2}.$$

On note Γ la représentation graphique de f dans un repère orthogonal et D la droite d'équation $y = \frac{5}{2}x$.
On note $\mathcal{A}$ l'aire (en unités d'aire) du domaine délimité par la courbe Γ , la droite D et la droite d'équation $x = 0$.
On note O, P, Q et R les points de coordonnées O(0 ; 0), P(0 ; 5), Q(2 ; 5) et R$\left(0\ ;\ \mathrm{e}^2\right)$.
(Voir la représentation ci-dessous).

1. Détermination d'un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$
   (a) Montrer par le calcul que le point Q appartient à la droite D et à la courbe Γ et que la courbe Γ coupe l'axe des ordonnées au point R.
   (b) Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte des aires de chacun des triangles OPQ et OQR.
   En déduire un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ en unités d'aire.
2. Calcul de la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$
   (a) Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ à l'aide d'une expression faisant intervenir une intégrale.
   (b) Soit G la fonction définie pour tout x élément de $\mathbb{R}$ par

   $$G(x) = \left(-x^2 - 2x - 3\right) \mathrm{e}^{-x+2}.$$

   On note G' la fonction dérivée de G sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout x élément de $\mathbb{R}$, calculer $G'(x)$ en donnant les détails du calcul.
   En déduire une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (c) Déterminer la valeur exacte de $\mathcal{A}$. En donner une valeur approchée arrondie au centième.



FORMULAIRE

L'aire dun triangle est donnée par : Aire = $\dfrac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2}$

• La dérivée d'un produit de fonctions (sur des intervalles convenables) : $(uv)' = u'v + uv'$.