

**SERIE ES SESSION JUIN 2003 France
METROPOLITAINE**

Problème (Énoncé)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0 ; 50]$ par

$$g(x) = (x - 15)^2 e^{-\frac{x}{3}}.$$

1. On note g' la fonction dérivée de g sur $[0 ; 50]$.

(a) Montrer que $g'(x) = \frac{1}{3}(x - 15)(21 - x)e^{-\frac{x}{3}}$.

(b) Étudier le signe de g' sur $[0 ; 50]$.

(c) Dresser le tableau de variations de g sur $[0 ; 50]$.

2. Soit G la fonction définie pour tout x de $[0 ; 50]$ par

$$G(x) = 3(-x^2 + 24x - 153)e^{-\frac{x}{3}}.$$

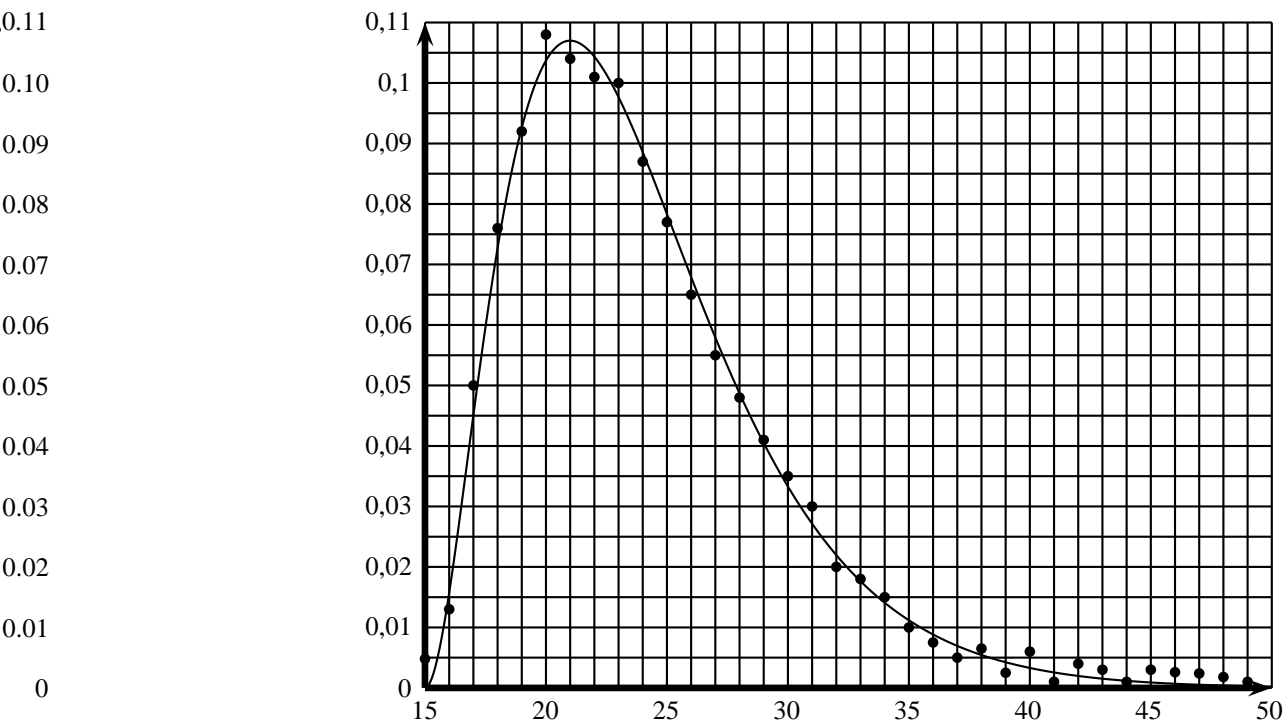
Montrer que G est une primitive de g sur $[0 ; 50]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[15 ; 49]$ par $f(x) = \frac{107e^7}{36\,000}g(x)$.

1. Justifier que f admet les mêmes variations que g sur l'intervalle $[15 ; 49]$.

2. La représentation graphique de f dans un repère orthogonal \mathcal{R} est donnée ci-dessous.



Calculer l'aire \mathcal{A} , exprimée en unités d'aire, du domaine plan délimité par \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 15$ et $x = 49$ (on utilisera le résultat de la **question A. 2**).

On donnera la valeur exacte de \mathcal{A} , puis sa valeur arrondie à 10^{-1} .

Partie C

Dans une population et pour une génération donnée, le taux de fécondité $t(k)$ à l'âge k où k est un entier compris entre 15 et 49, est le rapport entre le nombre de naissances chez les mères d'âge k et le nombre de femmes d'âge k de cette génération. Le nuage de points représentant le taux de fécondité d'une population pour une génération donnée (l'âge étant représenté en abscisse et le taux de fécondité en ordonnée) est représenté dans le repère \mathcal{R} .

On appelle descendance finale la somme des taux de fécondité par âge $t(k)$; elle est donc égale à $\sum_{k=15}^{49} t(k)$. On suppose qu'elle peut être modélisée par l'aire délimitée par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 15$ et $x = 49$.

1. Utiliser les résultats de la **partie B** afin d'estimer la descendance finale de cette génération (on donnera un résultat arrondi à 10^{-1}).

2. Une valeur arrondie à 10^{-2} de la somme des taux de fécondité par âge est 1,20.
Comparer ce résultat avec celui obtenu à la question précédente.
Le modèle choisi paraît-il adapté ?
3. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[15 ; 49]$. Peut-on affirmer que la descendance finale est égale à cette valeur moyenne ?
Justifier votre réponse.